

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Забайкальский государственный университет»
(ФГБОУ ВО «ЗабГУ»)

УДК 517.956
№ госрегистрации 01201461151
Инв. №



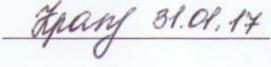
УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной
и инновационной работе,
Д-р техн. наук, профессор
А.Н. Хатькова
«31» 01 2017 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

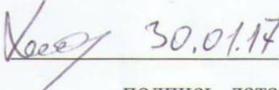
Новый метод решения задач математической физики в областях
с сингулярными возмущениями

по теме: ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ
ОБЛАСТЯХ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ПЛЕНОЧНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ И
ПЛЕНОЧНЫМИ ГРАНИЦАМИ. ПРИЛОЖЕНИЯ В НАНОТЕХНОЛОГИЯХ
(заключительный)

Начальник НИУ

 31.01.17 Е.С. Крапивина
подпись, дата

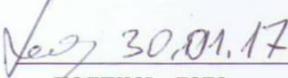
Руководитель темы

 30.01.17 С. Е. Холодовски
подпись, дата

Чита 2017

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель и исполнитель темы
профессор,
д-р физ.-мат. наук,
доцент

 30.01.17 С. Е. Холодовский
подпись, дата

РЕФЕРАТ

Отчет 39 с., 28 источников.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, МНОГОСЛОЙНЫЕ ПЛЕНОЧНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ, ПЛЕНОЧНЫЕ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТЕЙ

Объектом исследования являются краевые задачи математической физики в областях с пленочными структурами в виде многослойных пленочных включений и пленочных границ областей для плоских и сферических пленок.

Целью работы является разработка аналитических методов решения краевых задач с пленочными структурами и их применение к решению различных классов задач математической физики в областях с пленочными включениями и пленочными границами.

Результаты работы в 2016 г.

- Выведены обобщенные условия сопряжения и обобщенные граничные условия на сферических многослойных пленках.

- Разработанный метод свертывания разложений Фурье применен к решению краевых задач относительно уравнения Лапласа в пространстве R^3 со сферическими пленочными включениями и пленочными границами и к решению других задач с пленками. Указанным методом выводятся формулы, выражающие решения задач с пленками через решения аналогичных классических задач без пленок с сохранением уравнения и граничных функций. Это позволяет по известному решению некоторой классической задачи без пленки получать явные решения серии краевых задач в данных областях с различными пленками. При этом в зависимости от числа сильно- и слабо проницаемых прослоек в многослойных пленках порядок производных в граничных условиях на пленках может быть выше порядка производных в уравнении, что является новым в теории краевых задач математической физики.

- Проведено математическое обоснование полученных решений. Доказаны соответствующие теоремы существования и единственности: в частности выведены формулы прямых и обратных операторов, отображающих решения классических задач на решения задач с пленками. Также доказано, что если классическая задача без пленки корректна, то аналогичная задача с многослойной пленкой также корректна и ее решение строится по выведенным формулам в явном виде.

Полученные результаты опубликованы в 3 статьях [24]-[26] (одна из которых входит в перечень Web of science и Scopus), в 2 тезисов докладов на Международных конференциях [27]-[28], а также подготовлена и сдана в печать монография «Задачи математической физики в областях с пленочными включениями и пленочными границами». Сданы в печать 3 статьи в центральные журналы.

Результаты работы могут быть использованы

- при исследовании динамических процессов в композитных материалах, содержащих наноразмерные пленочные включения и пленочные покрытия,

- в задачах теплоизоляции зданий, круглых труб горячего водоснабжения и других объектов,

- в задачах экранирования загрязненных зон.

Развитие исследования.

Планируется рассмотреть и решить классы краевых задач с многослойными пленочными границами в случае, когда параметры сильно- и слабо проницаемых прослоек в пленке принимают свои предельные значения. Указанные предельные пленки имеют определенный физический смысл. Такие пленки моделируют сильно- и слабо проницаемые пленки «большого» и «малого» раскрытия.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
ВВЕДЕНИЕ	6
ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ	8
1 Задачи сопряжения в R^3 со сферическими пленками	8
1.1 Обобщенные условия сопряжения на многослойных сферических пленках	8
1.2 Задачи для неоднородного уравнения вне шара D_1	10
1.3 Задачи для неоднородного уравнения в шаре D_1	14
1.4 Краевые задачи с условиями сопряжения на сферических пленках	17
1.5 Примеры	18
2 Краевые задачи в шаре, ограниченном сильно- или слабо проницаемой пленкой	19
2.1 Обобщенные граничные условия на многослойных пленках	19
2.2 Задачи первого типа для двухслойных пленок	21
2.3 Задачи второго типа для двухслойных пленок	24
3 Краевые задачи в кусочно-однородных цилиндрах с трехслойным пленочным включением и их приложения	26
3.1 Пленки типа (A_1BA_2)	26
3.2 Пленки типа (B_1AB_2)	30
3.3 Частные случаи	32
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	36
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	37
Список работ исполнителей НИР по данному гос. заданию за 2016 г.	39

ВВЕДЕНИЕ

Многослойные пленочные структуры широко используются для решения различных прикладных задач. В частности большой интерес имеют задачи тепломассопереноса в средах, содержащих пленочные включения и пленочные покрытия, которые моделируют естественные и искусственные экраны, трещины, дренажи, проводники, электроды, мембраны, изоляторы и т.д. В технике широкое применение находят композитные материалы, содержащие наноразмерные пленочные включения и пленочные покрытия (нанокompозиты). Ленточные дренажи и экраны используются в задачах экологии при ограждении загрязненных зон, при перехвате нежелательных и стимулировании полезных потоков. При этом сильно- и слабо проницаемые пленки часто используются совместно в виде многослойных пленок. В вопросах теплоизоляции зданий используются пленочные теплоизоляторы.

Пленочные включения, несмотря на свой незначительный объем, могут существенно влиять на динамические процессы, протекающие в указанных материалах, при этом наличие пленок может существенно исказить картину течения.

Исследование динамических процессов в материалах с пленочными включениями приводит к краевым задачам с обобщенными условиями сопряжения или обобщенными граничными условиями на пленках.

Вышеизложенное определяет актуальность темы исследования.

Решению краевых задач в областях с пленочными включениями посвящены работы Пилатовского В.П., Н.И. Мусхелишвили Н.И. и других [1]-[11]. Как правило, решения краевых задач с пленочными включениями ищутся в виде тех или иных потенциалов с неизвестной плотностью при интегрировании по контуру пленки, что приводит к системе интегральных или интегро-дифференциальных уравнений. В работе Коляно Ю.М. [11] методом интегральных преобразований Фурье и Ханкеля построено фундаментальное решение, когда условия на пленке учитываются в уравнении посредством введения обобщенных коэффициентов типа δ -функции. В работе [9] доказано существование и единственность обобщенного решения диффузионных задач с трехслойной пленкой (без построения самого решения), при этом условия сопряжения на пленке учитываются в уравнении посредством введения коэффициентов в виде обобщенных функций.

Отметим, что численные методы для решения краевых задач с пленочными включениями малоэффективны, т.к. требуют достаточно мелкой сетки аппроксимации в окрестности пленок, где имеет место резкое изменение параметров.

В данном проекте разработаны методы, позволяющие получать явные решения краевых задач для широкого класса линейных уравнений (эллиптических, гиперболических и па-

рабочих) в областях с пленочными включениями и пленочными границами [12]-[20]. Полученные решения имеют вид достаточно простых формул, т.к. содержат сложность лишь от наличия пленок, а сложность от классической составляющей задачи включена в ее известное решение. В 2016 г. разработанный метод свертывания разложений Фурье применен к решению новых краевых задач в областях с многослойными криволинейными пленочными включениями и пленочными границами.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1 Задачи сопряжения в R^3 со сферическими пленками

1.1 Обобщенные условия сопряжения на многослойных сферических пленках

В пространстве R^3 рассмотрено шаровое включение $D_1 = (0 \leq r < 1) \times (0 \leq \theta \leq \pi) \times (0 \leq \sigma < 2\pi)$ проницаемости k_1 с границей $r = 1$ в виде многослойной пленки, состоящей n сильно- и слабо проницаемых прослоек, где r, θ, σ – сферические координаты. Внешняя область $D_2 = R^3 \setminus D_1$ имеет проницаемость k_2 . Для функций $u_j(r, \theta, \sigma)$ в D_j рассмотрено уравнение $r^2 \Delta u_j = 0$:

$$\partial_r(r^2 \partial_r u_j) + Lu_j = H_j(r, \theta, \sigma), \quad j = 1, 2, \quad (1.1.1)$$

где

$$Lu_j = \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta u_j) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\sigma^2 u_j, \quad (1.1.2)$$

Δ – оператор Лапласа, $H_j = 0$ в окрестности пленки $r = 1$. Сильно проницаемые прослойки моделируются бесконечно тонкими слоями с бесконечно большой проницаемостью и характеризуются параметрами $A_i: k_0 l \rightarrow A_i$ при $l \rightarrow 0$, $k_0 \rightarrow \infty$, где l – толщина прослойки, k_0 – ее проницаемость. Слабо проницаемые прослойки моделируются бесконечно тонкими слоями с бесконечно малой проницаемостью и характеризуются параметрами $B_i: l/k_0 \rightarrow B_i$ при $l \rightarrow 0$, $k_0 \rightarrow 0$, где l – толщина прослойки, k_0 – ее проницаемость.

Параметр одиночной сильно (слабо) проницаемой пленки A (B) можно определить экспериментально, замеряя потоки P_1 (P_2) через границу элемента D_0 среды в виде параллелепипеда $a_i \leq x_i \leq b_i$, $i = 1, 2, 3$ с сильно (слабо) проницаемой пленкой $x_2 = const$

($x_1 = const$), когда на границах $x_i = a_i$, $x_i = b_i$ при $i = 1$ задана разность потенциалов Δu , а при $i = 2, 3$ указанные границы непроницаемы:

$$A = \frac{1}{\Delta u \Delta x_3} (P_1 - P) \Delta x_1, \quad B = \left(\frac{1}{P_2} - \frac{1}{P} \right) \Delta u \Delta x_2 \Delta x_3, \quad \Delta x_i = b_i - a_i,$$

где P – аналогичный поток через ∂D_0 при отсутствии пленки.

На данной многослойной пленке по индукции выведены условия сопряжения

$$r = 1: \quad u_2 - u_1 = F_n u_1, \quad k_2 \partial_r u_2 - k_1 \partial_r u_1 = G_n u_1, \quad (1.1.3)$$

где операторы F_n , G_n строятся по рекуррентным формулам

$$F_{i+1} u = F_i u, \quad G_{i+1} u = A_{i+1} \{ \partial_r (r^2 \partial_r u) + F_i [\partial_r (r^2 \partial_r u)] \} + G_i u,$$

$$F_{i+1} u = B_{i+1} (k_1 \partial_r u + G_i u) + F_i u, \quad G_{i+1} u = G_i u.$$

В поставленной задаче (1.1.1), (1.1.3) функции $H_j(r, \theta, \sigma)$ предполагаются такими, для которых аналогичная задача в однородном пространстве R^3 (без пленки) вида

$$\partial_r (r^2 \partial_r f) + Lf = \begin{cases} H_1(r, \theta, \sigma), & r < 1, \\ H_2(r, \theta, \sigma), & r > 1 \end{cases}$$

является корректной. Далее рассматриваются задачи (1.1.1), (1.1.3) для однослойных сильно- или слабо проницаемых пленок, когда одна из функций H_i равна нулю, при этом решение общей задачи имеет вид суммы решений указанных задач.

1.2 Задачи для неоднородного уравнения вне шара D_1

1.2.1 В случае сильно проницаемой пленки при неоднородном уравнении в D_2 задача (1.1.1), (1.1.3) имеет вид

$$\partial_r(r^2\partial_r u_1) + Lu_1 = 0, \quad r < 1, \quad (1.2.1)$$

$$\partial_r(r^2\partial_r u_2) + Lu_2 = H(r, \theta, \sigma), \quad r > 1, \quad (1.2.2)$$

$$r = 1: \quad u_2 = u_1, \quad k_2\partial_r u_2 - k_1\partial_r u_1 = A\partial_r(r^2\partial_r u_1), \quad (1.2.3)$$

где $H = 0$ в окрестности пленки $r = 1$. Данная задача решается методом свертывания разложений Фурье, разработанным руководителем проекта [12]-[15]. Следуя этому методу, сначала с помощью классического метода Фурье [21] решение задачи с пленкой (1.2.1)-(1.2.3) и решение аналогичной задачи без пленки вида

$$\partial_r(r^2\partial_r f) + Lf = \begin{cases} 0, & r \leq 1, \\ H(r, \theta, \sigma), & r > 1 \end{cases} \quad (1.2.4)$$

строятся в виде разложений Фурье:

$$u_1(r, \theta, \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n Y_n(\theta, \sigma), \quad r < 1, \quad (1.2.5)$$

$$u_2(r, \theta, \sigma) = f(r, \theta, \sigma) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{-n-1} Y_n(\theta, \sigma), \quad r > 1, \quad (1.2.6)$$

$$f(r, \theta, \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\theta, \sigma), \quad r \leq 1, \quad (1.2.7)$$

где

$$a_n = \frac{(2n+1)k_2}{d_n}, \quad b_n = -1 + \frac{(2n+1)k_2}{d_n}, \quad d_n = An^2 + (k_1 + k_2 + A)n + k_2, \quad (1.2.8)$$

$Y_n(\theta, \sigma)$ – сферические гармоники функции $f(1, \theta, \sigma)$, т.е.

$$f(1, \theta, \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \sigma).$$

Затем в разложении Фурье решения (1.2.5), (1.2.6) задачи с пленкой выделяется разложение Фурье решения (1.2.7) задачи без пленки. При этом дроби (1.2.8) разлагаются на простейшие и используется формула

$$r^{-\gamma} \int_0^r t^{\gamma-1} f(t, \theta, \sigma) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n + \gamma} Y_n(\theta, \sigma), \quad r < 1,$$

которая следует из разложения (1.2.7). В результате получены формулы, выражающие решение u задачи с пленкой непосредственно через функцию f (без разложений Фурье):

$$u_1(r, \theta, \sigma) = \int_0^r f(t, \theta, \sigma) (p_1 r^{-\gamma_1} t^{\gamma_1-1} - p_2 r^{-\gamma_2} t^{\gamma_2-1}) dt, \quad r < 1, \quad (1.2.9)$$

$$u_2(r, \theta, \sigma) = f(r, \theta, \sigma) - \rho f(\rho, \theta, \sigma) +$$

$$+ \int_0^{\rho} f(t, \theta, \sigma) [(rt)^{\gamma_1-1} p_1 - (rt)^{\gamma_2-1} p_2] dt, \quad r > 1, \quad (1.2.10)$$

где $\rho = 1/r$, постоянные $p_i = k_2(1 - 2\gamma_i)/\sqrt{T}$,

$$\gamma_i = \frac{k_1 + k_2 + A + (-1)^i \sqrt{T}}{2A}, \quad T = (k_1 + k_2 + A)^2 - 4Ak_2,$$

$T > 0$ для любых $A > 0$, $k_i > 0$. Доказана

Теорема 1. Если функция $f(r, \theta, \sigma)$ является решением корректной задачи (1.2.4), то существует единственное решение задачи (1.2.1)-(1.2.3), которое строится по формулам (1.2.9), (1.2.10).

При этом найден оператор, обратный операторам (1.2.9), (1.2.10):

$$f(r, \theta, \sigma) = \frac{A}{2k_2} r \partial_r u_1(r, \theta, \sigma) + \frac{2(k_1 + k_2) + A}{4k_2} u_1(r, \theta, \sigma) + \\ + \frac{2(k_2 - k_1) - A}{8k_2} r^{-\frac{1}{2}} \int_0^r t^{-\frac{1}{2}} u_1(t, \theta, \sigma) dt, \quad r < 1,$$

$$f(r, \theta, \sigma) = u_2(r, \theta, \sigma) + \frac{A}{2k_2} \rho^2 \partial_\rho u_1(\rho, \theta, \sigma) + \frac{2(k_1 - k_2) + A}{4k_2} \rho u_1(\rho, \theta, \sigma) + \\ + \frac{2(k_2 - k_1) - A}{8k_2} \rho^{\frac{1}{2}} \int_0^\rho t^{-\frac{1}{2}} u_1(t, \theta, \sigma) dt, \quad r > 1, \quad \rho = 1/r.$$

Из условий сопряжения (1.2.3) следует непрерывность функции $f(r, \theta, \sigma)$ и ее производных при $r = 1$.

1.2.2 В случае слабо проницаемой пленки $r = 1$ с параметром B задача имеет вид (1.2.1), (1.2.2),

$$r = 1: \quad u_2 - u_1 = Bk_1 \partial_r u_1, \quad k_2 \partial_r u_2 = k_1 \partial_r u_1. \quad (1.2.11)$$

Доказана

Теорема 2. Если функция $f(r, \theta, \sigma)$ является решением корректной задачи (1.2.4), то существует единственное решение задачи (1.2.1), (1.2.2), (1.2.11), которое строится по формулам

$$u_1(r, \theta, \sigma) = \int_0^r f(t, \theta, \sigma) (p_1 r^{-\gamma_1} t^{\gamma_1 - 1} - p_2 r^{-\gamma_2} t^{\gamma_2 - 1}) dt, \quad r < 1, \quad (1.2.12)$$

$$u_2(r, \theta, \sigma) = f(r, \theta, \sigma) + \rho f(\rho, \theta, \sigma) -$$

$$-\int_0^{\rho} f(t, \theta, \sigma) [(rt)^{\gamma_1-1} q_1 - (rt)^{\gamma_2-1} q_2] dt, \quad r > 1, \quad (1.2.13)$$

где $\rho = 1/r$, $p_i = k_2(1 - 2\gamma_i)/\sqrt{T}$, $q_i = [k_2 - (2k_1 + \beta)\gamma_i]/\sqrt{T}$,

$$\gamma_i = \frac{k_1 + k_2 + \beta + (-1)^i \sqrt{T}}{2\beta}, \quad T = (k_1 + k_2 + \beta)^2 - 4\beta k_2,$$

$$\beta = k_1 k_2 B, \quad T > 0, \quad \gamma_i > 0.$$

Оператор, обратный операторам (1.2.12), (1.2.13), имеет вид

$$f(r, \theta, \sigma) = \frac{\beta}{2k_2} r \partial_r u_1(r, \theta, \sigma) + \frac{2(k_1 + k_2) + \beta}{4k_2} u_1(r, \theta, \sigma) + \\ + \frac{2(k_2 - k_1) - \beta}{8k_2} r^{-\frac{1}{2}} \int_0^r t^{-\frac{1}{2}} u_1(t, \theta, \sigma) dt, \quad r < 1,$$

$$f(r, \theta, \sigma) = u_2(r, \theta, \sigma) + \frac{\beta}{2k_2} \rho^2 \partial_\rho u_1(\rho, \theta, \sigma) + \frac{2(k_1 - k_2) + \beta}{4k_2} \rho u_1(\rho, \theta, \sigma) + \\ + \frac{2(k_2 - k_1) - \beta}{8k_2} \rho^{\frac{1}{2}} \int_0^\rho t^{-\frac{1}{2}} u_1(t, \theta, \sigma) dt, \quad r > 1.$$

При этом функция $f(r, \theta, \sigma)$ и ее производные непрерывны при $r = 1$.

1.2.3 При отсутствии пленки, т.е. при идеальном контакте зон D_i с различной проницаемостью k_i , решение задачи (1.2.1)-(1.2.3) при $A = 0$ получено в виде

$$u_1(r, \theta, \sigma) = 2\gamma f(r, \theta, \sigma) + \gamma(1 - 2\gamma) r^{-\gamma} \int_0^r f(t, \theta, \sigma) t^{\gamma-1} dt, \quad r < 1, \quad (1.2.14)$$

$$u_2(r, \theta, \sigma) = f(r, \theta, \sigma) + (2\gamma - 1)\rho f(\rho, \theta, \sigma) + \\ + \gamma(1 - 2\gamma)r^{\gamma-1} \int_0^\rho f(t, \theta, \sigma)t^{\gamma-1} dt, \quad r > 1, \quad (1.2.15)$$

где $\rho = 1/r$, $\gamma = k_2/(k_1 + k_2)$, $f(r, \theta, \sigma)$ – решение классической задачи (1.2.4). Из формул (1.2.14), (1.2.15) при $k_1 = 0$ ($\gamma = 1$) следует теорема Вейса об обтекании непроницаемой сферы $r = 1$ произвольным потоком с заданным потенциалом $f(r, \theta, \sigma)$ [22, с. 467]:

$$u_2(r, \theta, \sigma) = f(r, \theta, \sigma) + r^{-1}f(r^{-1}, \theta, \sigma) - \int_0^{1/r} f(\xi, \theta, \sigma)d\xi, \quad r > 1.$$

1.3 Задачи для неоднородного уравнения в шаре D_1

1.3.1 В случае сильно проницаемой пленки при неоднородном уравнении в D_1 задача (1.1.1), (1.1.3) имеет вид

$$\partial_r(r^2 \partial_r u_1) + Lu_1 = H(r, \theta, \sigma), \quad r < 1, \quad (1.3.1)$$

$$\partial_r(r^2 \partial_r u_2) + Lu_2 = 0, \quad r > 1, \quad (1.3.2)$$

$$r = 1: \quad u_2 = u_1, \quad k_2 \partial_r u_2 - k_1 \partial_r u_1 = A \partial_r(r^2 \partial_r u_1). \quad (1.3.3)$$

где оператор L определен в (1.1.2). Методом свертывания разложений Фурье решение задачи (1.3.1)-(1.3.3) получено в виде

$$u_1(r, \theta, \sigma) = f(r, \theta, \sigma) - \rho f(\rho, \theta, \sigma) +$$

$$+ \int_{\infty}^{\rho} f(t, \theta, \sigma) [(rt)^{-\gamma_2} p_2 - (rt)^{-\gamma_1} p_1] dt, \quad r < 1, \quad (1.3.4)$$

$$u_2(r, \theta, \sigma) = \int_{\infty}^r f(t, \theta, \sigma) (r^{\gamma_2-1} t^{-\gamma_2} p_2 - r^{\gamma_1-1} t^{-\gamma_1} p_1) dt, \quad r > 1, \quad (1.3.5)$$

где $\rho = 1/r$, постоянные $p_i = k_1(1 - 2\gamma_i)/\sqrt{T}$,

$$\gamma_i = \frac{k_1 + k_2 + A + (-1)^i \sqrt{T}}{2A}, \quad T = (k_1 + k_2 + A)^2 - 4Ak_2,$$

при этом $T > 0$, $\gamma_i > 0$; $f(r, \theta, \sigma)$ – решение аналогичной классической задачи без пленки:

$$\partial_r(r^2 \partial_r f) + Lf = \begin{cases} H(r, \theta, \sigma), & r < 1, \\ 0, & r \geq 1. \end{cases} \quad (1.3.6)$$

Доказана

Теорема 3. Если функция $f(r, \theta, \sigma)$ является решением корректной задачи (1.3.6) и при $r \rightarrow \infty$

$$r^{1/2} f \rightarrow 0, \quad r^{3/2} \partial_r f \rightarrow 0, \quad (1.3.7)$$

то существует единственное решение задачи (1.3.1)-(1.3.3), которое строится по формулам (1.3.4), (1.3.5).

Операторы, обратные операторам (1.3.4), (1.3.5), получены в виде

$$f(r, \theta, \sigma) = -\frac{A}{2k_1} r \partial_r u_2(r, \theta, \sigma) + \frac{2(k_1 + k_2) - A}{4k_1} u_2(r, \theta, \sigma) + \\ + \frac{2(k_1 - k_2) + A}{8k_1} r^{-\frac{1}{2}} \int_{\infty}^r t^{-\frac{1}{2}} u_2(t, \theta, \sigma) dt, \quad r > 1,$$

$$f(r, \theta, \sigma) = u_1(r, \theta, \sigma) - \frac{A}{2k_1} \rho^2 \partial_\rho u_2(\rho, \theta, \sigma) +$$

$$+ \frac{2(k_2 - k_1) - A}{4k_1} \rho u_2(\rho, \theta, \sigma) + \frac{2(k_1 - k_2) + A}{8k_1} \rho^{\frac{1}{2}} \int_\infty^\rho t^{-\frac{1}{2}} u_2(t, \theta, \sigma) dt,$$

при этом функция $f(r, \theta, \sigma)$ и ее производные непрерывны при $r = 1$.

1.3.2 В случае слабо проницаемой пленки с параметром B задача имеет вид (1.3.1), (1.3.2),

$$r = 1: \quad u_2 - u_1 = Bk_2 \partial_r u_2, \quad k_2 \partial_r u_2 = k_1 \partial_r u_1. \quad (1.3.8)$$

Доказана

Теорема 4. Если функция $f(r, \theta, \sigma)$ является решением корректной задачи (1.3.6) и при $r \rightarrow \infty$ удовлетворяет условиям (1.3.7), то существует единственное решение задачи (1.3.1), (1.3.2), (1.3.8) которое строится по формулам

$$u_1(r, \theta, \sigma) = f(r, \theta, \sigma) + \rho f(\rho, \theta, \sigma) +$$

$$+ \int_\infty^\rho f(t, \theta, \sigma) [(rt)^{-\gamma_2} q_2 - (rt)^{-\gamma_1} q_1] dt, \quad r < 1, \quad (1.3.9)$$

$$u_2(r, \theta, \sigma) = \int_\infty^r f(t, \theta, \sigma) (r^{\gamma_2 - 1} t^{-\gamma_2} p_2 - r^{\gamma_1 - 1} t^{-\gamma_1} p_1), \quad r > 1, \quad (1.3.10)$$

где $q_i = [\beta - 2k_2 + k_1 + (2k_2 - \beta)\gamma_i] / \sqrt{T}$, $p_i = k_1(1 - 2\gamma_i) / \sqrt{T}$,

$$\gamma_i = \frac{k_1 + k_2 + \beta + (-1)^i \sqrt{T}}{2\beta}, \quad T = (k_1 + k_2 + \beta)^2 - 4\beta k_2 > 0,$$

$$\rho = 1/r, \quad T > 0, \quad \gamma_i > 0.$$

Операторы, обратные операторам (1.3.9), (1.3.10), строятся по формулам

$$f(r, \theta, \sigma) = -\frac{\beta}{2k_1} r \partial_r u_2(r, \theta, \sigma) + \frac{2(k_1 + k_2) - \beta}{4k_1} u_2(r, \theta, \sigma) +$$

$$+ \frac{2(k_1 - k_2) + \beta}{8k_1} r^{-\frac{1}{2}} \int_{\infty}^r t^{-\frac{1}{2}} u_2(t, \theta, \sigma) dt, \quad r > 1,$$

$$f(r, \theta, \sigma) = u_1(r, \theta, \sigma) + \frac{\beta}{2k_1} \rho^2 \partial_\rho u_2(\rho, \theta, \sigma) + \frac{2(k_2 - k_1) - \beta}{4k_1} \rho u_2(\rho, \theta, \sigma) +$$

$$+ \frac{2(k_1 - k_2) + \beta}{8k_1} \rho^{\frac{1}{2}} \int_{\infty}^{\rho} t^{-\frac{1}{2}} u_2(t, \theta, \sigma) dt, \quad r < 1,$$

где функция $f(r, \theta, \sigma)$ и ее производные непрерывны при $r = 1$.

1.4 Краевые задачи с условиями сопряжения на сферических пленках

В полученных формулах (1.2.9), (1.2.10), (1.2.12), (1.2.13), (1.3.4), (1.3.5), (1.3.9), (1.3.10) переменные θ, σ являются свободными (параметрами). Отсюда по этим переменным функции $f(r, \theta, \sigma)$ и $u_i(r, \theta, \sigma)$ можно подчинить дополнительным граничным условиям. При этом указанные формулы сохраняются.

Пусть в указанных формулах функция $f(r, \theta, \sigma)$ является решением краевой задачи в области $D_0 = (0 \leq r < \infty) \times (p_1 \leq \theta \leq p_2) \times (q_1 \leq \sigma \leq q_2)$ с однородными условиями при $r \leq 1$ вида

$$\partial_r(r^2 \partial_r f) + Lf = \begin{cases} 0, & r \leq 1, \\ H(r, \theta, \sigma), & r > 1, \end{cases}$$

$$M_i f|_{\theta=p_i} = \begin{cases} 0, & r \leq 1, \\ h_i(r, \sigma), & r > 1, \end{cases} \quad i=1,2,$$

$$N_j f|_{\sigma=q_j} = \begin{cases} 0, & r \leq 1, \\ g_j(r, \theta), & r > 1, \end{cases} \quad j=1,2,$$

где $0 \leq p_1 < p_2 < \pi$, $0 \leq q_1 < q_2 < 2\pi$; M_i и N_j – операторы граничных условий 1-го, или 2-го, или 3-го рода по соответствующим переменным θ, σ в произвольном сочетании. Здесь границами области D_0 являются полуплоскости $\sigma = q_i$ и конические поверхности $\theta = p_j$. Тогда указанные формулы дают решения задач (1.2.1)-(1.2.3); (1.2.1), (1.2.2), (1.2.11); (1.3.1)-(1.3.3); (1.3.1), (1.3.2), (1.3.8) в области D_0 с сильно- или слабо проницаемой пленкой $r = 1$ при граничных условиях

$$M_i u_{1|\theta=p_i} = 0, \quad N_j u_{1|\sigma=q_j} = 0, \quad M_i u_{2|\theta=p_i} = h_i(r, \sigma),$$

$$N_j u_{2|\sigma=q_j} = g_i(r, \sigma), \quad i=1,2, \quad j=1,2.$$

1.5 Примеры

В качестве примеров рассмотрено обтекание экранированного шарового включения $D_1(r < 1)$ поступательным потоком, т.е. в формулах (1.2.9), (1.2.10), (1.2.12), (1.2.13) $f = v z = v r \cos \theta$. В случаях сильно- и слабо проницаемой пленки $r = 1$ решения задач (1.2.1)-(1.2.3) и (1.2.1), (1.2.2), (1.2.11) приводятся соответственно к виду:

$$u_1 = \frac{3k_2 v r \cos \theta}{2k_2 + k_1 + 2A}, \quad u_2 = v \cos \theta \left[r + \frac{k_2 - k_1 - 2A}{r^2 (2k_2 + k_1 + 2A)} \right] \quad (1.5.1)$$

и

$$u_1 = \frac{3k_2 v r \cos \theta}{2k_2 + k_1 + 2\beta}, \quad u_2 = v \cos \theta \left[r + \frac{k_2 - k_1 + \beta}{r^2 (2k_2 + k_1 + 2\beta)} \right], \quad (1.5.2)$$

где $\beta = k_1 k_2 B$. Отсюда в шаре D_1 в обоих случаях имеет место поступательный поток. Кроме того, в обоих случаях наличие сильно- или слабо проницаемой пленки приводит к снижению модуля скорости в D_1 по сравнению с идеальным контактом зон D_i при отсутствии пленки. Последнее объясняется тем, что сильно проницаемая пленка принимает поток и частично отводит его в обход зоны D_1 , а слабо проницаемая пленка препятствует потоку в эту зону. Если $A = k_1 k_2 B$, то течения в шаре D_1 в случаях сильно- и слабо проницаемых пленок идентичны.

Если в формуле (1.5.1) $k_2 = k_1 + 2A$ ($k_2 > k_1$), то $u_2 = f$, т.е. внесение данного менее проницаемого включения D_1 , экранированного сильно проницаемой пленкой, не искажает течение во внешней области D_2 . Аналогично в формуле (1.5.2) при $k_1 = k_2 + \beta$ имеем $u_2 = f$, т.е. внесение данного более проницаемого включения D_1 , экранированного слабо проницаемой пленкой, также не искажает течение в области D_2 .

2 Краевые задачи в шаре, ограниченном сильно- или слабо проницаемой пленкой

2.1 Обобщенные граничные условия на многослойных пленках

Рассмотрен шар $D = (0 \leq r < 1) \times (0 \leq \theta \leq \pi) \times (0 \leq \sigma < 2\pi)$ с границей $r = 1$ в виде многослойной пленки, состоящей из n сильно- и слабо проницаемых прослоек (здесь полагаем, что проницаемость $k = 1$ в шаре D). Для функции $u(r, \theta, \sigma)$ в шаре D рассмотрено уравнение (1.1.1):

$$\partial_r (r^2 \partial_r u) + Lu = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (2.1.1)$$

где оператор L имеет вид (1.1.2).

Показано, что на многослойной пленке $r = 1$ можно рассматривать обобщенные граничные условия двух типов и соответственно два типа краевых задач: при заданном значении потенциала $\varphi(\theta, \sigma)$ (условие 1-го типа) и при заданной нормальной скорости $\psi(\theta, \sigma)$ (условие 2-го типа) на внешней стороне пленки при $r = 1 + 0$.

Граничное условие первого типа на n -слойной пленке получено в виде

$$u + F_n u|_{r=1} = \varphi(\theta, \sigma), \quad (2.1.2)$$

где оператор F_n строится по рекуррентным формулам

$$F_{i+1}u = F_i u, \quad G_{i+1}u = A_{i+1} \{ \partial_r (r^2 \partial_r u) + F_i [\partial_r (r^2 \partial_r u)] \} + G_i u.$$

$$F_{i+1}u = B_{i+1} (\partial_r u + G_i u) + F_i u, \quad G_{i+1}u = G_i u, \quad (2.1.3)$$

$F_0 u = G_0 u = 0$, $i = 1, \dots, n-1$; A_{i+1} (B_{i+1}) – параметр соответствующей сильно (слабо) проницаемой прослойки.

Граничное условие 2-го типа имеет вид

$$\partial_r u + G_n u|_{r=1} = \psi(\theta, \sigma), \quad (2.1.4)$$

где оператор G_n строится по рекуррентным формулам (2.1.3), функция $\psi(\theta, \sigma)$ должна удовлетворять условию [21, с. 293]:

$$\int_0^{2\pi} d\sigma \int_0^\pi \psi(\theta, \sigma) \sin \theta d\theta = 0.$$

Для граничных условий первого типа добавление сильно проницаемой прослойки $r = 1 + 0$ (2.1.3) не меняет граничного условия (2.1.2), а для граничных условий второго типа добавление слабо проницаемой прослойки $r = 1 + 0$ (2.1.3) не меняет граничного условия (2.1.4). Поэтому в граничных условиях первого типа последняя прослойка $r = 1 + 0$

должна быть слабо проницаемой, а в граничных условиях второго типа – сильно проницаемой.

В зависимости от количества сильно- и слабо проницаемых прослоек в пленке порядок производных от искомой функции в граничных условиях может быть произвольным.

2.2 Задачи первого типа для двухслойных пленок

Пусть шар $D(r < 1)$ ограничен двухслойной пленкой, состоящей из сильно проницаемой прослойки $r = 1 - 0$ с параметром A и слабо проницаемой прослойки $r = 1 + 0$ с параметром B . Соответствующая краевая задача первого типа в D (2.1.1), (2.1.2) имеет вид

$$\partial_r(r^2\partial_r u) + Lu = 0, \quad r < 1, \quad (2.2.1)$$

$$u + B\partial_r u + AB\partial_r(r^2\partial_r u)|_{r=1} = \varphi(\theta, \sigma), \quad (2.2.2)$$

где $\varphi(\theta, \sigma) \in C(\partial D)$, $\varphi(\theta, 0) = \varphi(\theta, 2\pi)$, оператор L имеет вид (1.1.2).

Наряду с задачей (2.2.1), (2.2.2) рассмотрим в шаре D классическую задачу Дирихле с сохранением граничной функции $\varphi(\theta, \sigma)$:

$$\partial_r(r^2\partial_r f) + Lf = 0, \quad f|_{r=1} = \varphi(\theta, \sigma). \quad (2.2.3)$$

Задача Дирихле (2.2.3) является корректной, при этом ее решение строится методом Фурье в виде [21, с. 695]:

$$f(r, \theta, \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\theta, \sigma), \quad r < 1, \quad (2.2.4)$$

где $Y_n(\theta, \sigma)$ – сферические гармоники граничной функции:

$$\varphi(\theta, \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \sigma).$$

Представляя решение задачи с пленкой (2.2.1) в виде

$$u(r, \theta, \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n Y_n(\theta, \sigma), \quad r < 1, \quad (2.2.5)$$

из граничного условия (2.2.2) находим

$$a_n = \frac{1}{ABn^2 + (AB + B)n + 1}. \quad (2.2.6)$$

Из разложения (2.2.4) следует формула

$$\frac{1}{m!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} t^m f(re^{-t}, \theta, \sigma) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n Y_n(\theta, \sigma)}{(n + \gamma)^{m+1}}, \quad r < 1,$$

где $\gamma > 0$, $m = 0, 1, \dots$. Отсюда, разлагая дроби в a_n (2.2.6) на простейшие, решение (2.2.5) задачи (2.2.1), (2.2.2) с двухслойной пленкой найдем соответственно в виде

$$u(r, \theta, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^{\infty} f(re^{-t}, \theta, \sigma) (e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t}) dt \quad (2.2.7)$$

и

$$u(r, \theta, \sigma) = \frac{1}{AB} \int_0^{\infty} f(re^{-t}, \theta, \sigma) e^{-\gamma_0 t} t dt \quad (2.2.8)$$

соответственно при $T \neq 0$ и $T = 0$, где $T = (AB + B)^2 - 4AB$,

$$\gamma_i = \frac{AB + B + (-1)^i \sqrt{T}}{2AB}, \quad i=1,2; \quad \gamma_0 = \frac{A+1}{2A},$$

$\operatorname{Re} \gamma_i > 0$, $f(r, \theta, \sigma)$ – решение задачи Дирихле в шаре (2.2.3). При этом методом Грина функция $f(r, \theta, \sigma)$ выражается по формуле Пуассона [21, с. 326] (без разложений Фурье):

$$f(r, \theta, \sigma) = \frac{r^2 - 1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\eta \int_0^\pi \frac{\varphi(\xi, \eta) \sin \xi}{(r^2 - 2r \cos \mu + 1)^{3/2}} d\xi, \quad (2.2.9)$$

где $\cos \mu = \cos \theta \cos \xi + \sin \theta \sin \xi \cos(\eta - \sigma)$.

При $T < 0$ функция (2.2.7) действительна:

$$u(r, \theta, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{-T}} \int_0^\infty f(re^{-t}, \theta, \sigma) e^{-\gamma_0 t} \sin \beta t dt,$$

$\beta = \sqrt{-T}/(2AB)$. Доказана

Теорема 5. *Решение задачи (2.2.1), (2.2.2) с двухслойной пленкой существует, единственно и в соответствующих случаях параметра T строится по формулам (2.2.7), (2.2.8).*

При этом оператор, обратный операторам (2.2.7), (2.2.8) имеет вид

$$f(r, \theta, \sigma) = u + Br \partial_r u + AB \partial_r (r^2 \partial_r u).$$

В формулах (2.2.7), (2.2.8) переменные θ, σ являются свободными. Отсюда по этим переменным функции $f(r, \theta, \sigma)$ и $u(r, \theta, \sigma)$ можно подчинить дополнительным граничным условиям.

Пусть функция $f(r, \theta, \sigma)$ является решением краевой задачи (2.2.3) в области $D_0 = (0 \leq r < 1) \times (p_1 \leq \theta \leq p_2) \times (q_1 \leq \sigma \leq q_2)$ с однородными граничными условиями

$$M_i f_{|\theta=p_i} = 0, \quad i = 1, 2; \quad N_j f_{|\sigma=q_j} = 0, \quad j = 1, 2,$$

где $0 \leq p_1 < p_2 < \pi$, $0 \leq q_1 < q_2 < 2\pi$; M_i и N_j – операторы граничных условий 1-го, или 2-го, или 3-го рода по соответствующим переменным θ, σ в произвольном сочетании. Область D_0 в общем случае ограничена частью сферы $r = 1$, полуплоскостями $\sigma = q_i$ и коническими поверхностями $\theta = p_j$. Тогда решения задач в области D_0 с границей $r = 1$ в виде двухслойной пленки вида (2.2.1), (2.2.2),

$$M_i u_{|\theta=p_i} = 0, \quad i = 1, 2; \quad N_j u_{|\sigma=q_j} = 0, \quad j = 1, 2$$

также строятся по формулам (2.2.7), (2.2.8).

2.3 Задачи второго типа для двухслойных пленок

Пусть шар $D(r < 1)$ ограничен двухслойной пленкой, состоящей из слабо проницаемой прослойки $r = 1 - 0$ с параметром B и сильно проницаемой прослойки $r = 1 + 0$ с параметром A . Задача второго типа (2.1.1), (2.1.4) имеет вид

$$\partial_r(r^2 \partial_r u) + Lu = 0, \quad r < 1, \quad (2.3.1)$$

$$\partial_r u + A \partial_r(r^2 \partial_r u) + AB \partial_r^2(r^2 \partial_r u)|_{r=1} = \psi(\theta, \sigma), \quad (2.3.2)$$

где функция $\psi(\theta, \sigma) \in C(\partial D)$, $\psi(\theta, 0) = \psi(\theta, 2\pi)$, оператор L имеет вид (1.1.2).

Рассуждая аналогично, доказана

Теорема 6. *Решение задачи (2.3.1), (2.3.2) с двухслойной пленкой существует, единственно (с точностью до аддитивной постоянной) и в соответствующих случаях параметра T строится по формулам*

$$u(r, \theta, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^{\infty} f_0(re^{-t}, \theta, \sigma) (e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t}) dt \quad (2.3.3)$$

и

$$u(r, \theta, \sigma) = \frac{1}{AB} \int_0^{\infty} f_0(re^{-t}, \theta, \sigma) e^{-\gamma_0 t} t dt \quad (2.3.4)$$

соответственно при $T \neq 0$ и $T = 0$, где $T = A[A(B-1)^2 - 4B]$,

$$\gamma_i = \frac{AB + A + (-1)^i \sqrt{T}}{2AB}, \quad i = 1, 2; \quad \gamma_0 = \frac{B+1}{2B},$$

$\text{Re } \gamma_i > 0$, $f_0(r, \theta, \sigma)$ – решение задачи Неймана

$$\partial_r (r^2 \partial_r f_0) + Lf_0 = 0, \quad \partial_r f_0|_{r=1} = \psi(\theta, \sigma).$$

При этом функции u и f_0 определяются с точностью до аддитивной постоянной. Оператор, обратный операторам (2.3.3), (2.3.4) имеет вид

$$f_0(r, \theta, \sigma) = u + A \partial_r (ru) + AB \partial_r (r^2 \partial_r u).$$

Показано, что решение рассматриваемой задачи (2.3.1), (2.3.2) выражается через решение $f(r, \theta, \sigma)$ задачи Дирихле с сохранением граничной функции (2.3.2):

$$\partial_r (r^2 \partial_r f) + Lf = 0, \quad f|_{r=1} = \psi(\theta, \sigma), \quad (2.3.5)$$

т.е. решение задачи (2.3.1), (2.3.2) (как и решение задачи (2.2.1), (2.2.2)) строится в квадратурах без разложений Фурье с помощью формулы Пуассона (2.2.9) для граничной функции $\psi(\theta, \sigma)$:

$$u(r, \theta, \sigma) = \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_{21}} \int_0^\infty f(re^{-t}, \theta, \sigma) (\gamma_{21} - \gamma_2 e^{-\gamma_1 t} + \gamma_1 e^{-\gamma_2 t}) dt$$

и

$$u(r, \theta, \sigma) = \frac{1}{\gamma_0^2} \int_0^\infty f(re^{-t}, \theta, \sigma) (1 - e^{-\gamma_0 t} - \gamma_0 t e^{-\gamma_0 t}) dt$$

соответственно при $T \neq 0$ и $T = 0$, где решение $f(r, \theta, \sigma)$ задачи Дирихле (2.3.5) имеет вид (2.2.9) (при $\varphi = \psi$), $\gamma_{21} = \gamma_2 - \gamma_1$.

Выше решены задачи для однородного уравнения (2.3.1). Решения задач 1-го (2-го) типа для неоднородного уравнения

$$\partial_r (r^2 \partial_r u) + Lu = H(r, \theta, \sigma), \quad 0 < r < 1, \quad (2.3.6)$$

($H = 0$ в окрестности $r = 1 - 0$) имеют вид $u = w + v$, где $w(x, y)$ – решение классической задачи (2.3.6) с однородными граничными условиями 1-го (2-го) рода: $w|_{r=1} = 0$ ($\partial_r w|_{r=1} = 0$); а $v(x, y)$ – решение задачи 1-го (2-го) типа с однородным уравнением (2.3.1) и граничными функциями в правых частях условий (2.2.2) и (2.3.2) соответственно вида $\varphi(y) - F_n w|_{r=1}$ и $\psi(y) - G_n w|_{r=1}$.

3 Краевые задачи в кусочно-однородных цилиндрах с трехслойным пленочным включением и их приложения

3.1 Пленки типа $(A_1 B A_2)$

Природные биологические материалы не являются однородными и содержат множество пленочных включений. Пленки могут состоять из слабо- и сильно проницаемых мембран, которые фильтруют и перехватывают текучие массы. При этом через пленку происходит обмен веществ. В математических моделях различные динамические процессы описываются краевыми задачами математической физики.

В пространстве R^3 рассмотрен цилиндр $D = (x \in R) \times (y, z \in Q \subseteq R^2)$, разделенный трехслойной пленкой $x = 0$ на два полуцилиндра $D_1(x < 0)$ и $D_2(x > 0)$, когда пленка состоит из сильно проницаемой прослойки $x = -0$ с параметром A_1 , слабо проницаемой прослойки $x = 0$ с параметром B и сильно проницаемой прослойки $x = +0$ с параметром A_2 . Для функций $u_i(x, y, z)$ в полуцилиндрах D_i краевая задача имеет вид

$$\partial_x^2 u_1 + Lu_1 = 0, \quad Mu_{1|S} = 0, \quad x < 0, \quad (3.1.1)$$

$$\partial_x^2 u_2 + Lu_2 = H(x, y, z), \quad Mu_{2|S} = h(x, y, z), \quad x > 0, \quad (3.1.2)$$

$$x = 0: \quad u_2 - u_1 = B(v_1 + A_1 \partial_x^2 u_1), \quad v_2 - v_1 = A_1 \partial_x^2 u_1 + A_2 \partial_x^2 u_2, \quad (3.1.3)$$

где $\partial_x^n = \partial^n / \partial x^n$, $S = \partial D$ – боковая поверхность цилиндра D ; $H = 0$ в окрестности пленки $x = 0$, $v_i = k_i \partial_x u_i$ – нормальные составляющие скорости, k_i – проницаемость зоны D_i , операторы L и M являются линейными дифференциальными оператором по переменным y, z , т.е. операторы L и M не содержат производных по x и коэффициенты при производных не зависят от x . Кроме того, операторы L, M и заданные функции $H(x, y, z), h(x, y, z)$ (3.1.1), (3.1.2) считаются такими, для которых аналогичная классическая задача в цилиндре D без пленки вида

$$\partial_x^2 f + Lf = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ H(x, y, z), & x > 0, \end{cases} \quad Mf|_S = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ h(x, y, z), & x > 0 \end{cases} \quad (3.1.4)$$

корректна в некоторых пространствах функций. Отметим, что уравнения (3.1.1), (3.1.2) могут быть уравнениями любого типа (гиперболического, параболического, эллиптического), т.е. класс задач (3.1.1)-(3.1.3) достаточно широкий. При этом задача (3.1.1)-(3.1.3) описывает достаточно широкий класс процессов (теплопроводности, фильтрации жидкости, диффузии, электростатики), в цилиндрических областях, содержащих трехслойную пленку.

Рассматривая модельные случаи задач (3.1.1)-(3.1.3) и (3.1.4) для уравнения Лапласа, применяя к их решению метод Фурье с последующим свертыванием полученных разложений Фурье [12]-[15], выразим решение задачи (3.1.1)-(3.1.3) с пленкой через решение классической задачи (3.1.4) без пленки в виде

$$u_1 = \frac{2k_2}{s} \int_0^{\infty} f(x-t, y) \left(\frac{e^{-\gamma_1 t}}{\gamma_{21}\gamma_{31}} - \frac{e^{-\gamma_2 t}}{\gamma_{21}\gamma_{32}} + \frac{e^{-\gamma_3 t}}{\gamma_{31}\gamma_{32}} \right) dt, \quad (3.1.5)$$

$$u_2 = f(x, y) - f(-x, y) + \frac{2k_2}{s} \int_0^{\infty} f(-x-t, y) \left[\frac{N(\gamma_1)e^{-\gamma_1 t}}{\gamma_{21}\gamma_{31}} - \frac{N(\gamma_2)e^{-\gamma_2 t}}{\gamma_{21}\gamma_{32}} + \frac{N(\gamma_3)e^{-\gamma_3 t}}{\gamma_{31}\gamma_{32}} \right] dt; \quad (3.1.6)$$

$$u_1 = \frac{2k_2}{\gamma_{21}^2 s} \int_0^{\infty} f(x-t, y) [e^{-\gamma_1 t} (\gamma_{21} t - 1) + e^{-\gamma_2 t}] dt, \quad (3.1.7)$$

$$u_2 = f(x, y) - f(-x, y) + \frac{2k_2}{\gamma_{21}^2 s} \int_0^{\infty} f(-x-t, y) \left(e^{-\gamma_2 t} N(\gamma_2) + e^{-\gamma_1 t} [\gamma_{21} N(\gamma_1) t - N(\gamma_2) + \gamma_{21}^2 A_1 B] \right) dt \quad (3.1.8)$$

и

$$u_1 = \frac{k_2}{s} \int_0^{\infty} f(x-t, y) e^{-\gamma_1 t} t^2 dt, \quad (3.1.9)$$

$$u_2 = f(x, y) - f(-x, y) + \frac{2k_2}{s} \int_0^{\infty} f(-x-t, y) e^{-\gamma_1 t} \left[\frac{1}{2} N(\gamma_1) t^2 + B(k_1 - 2A_1 \gamma_1) t + A_1 B \right] dt, \quad (3.1.10)$$

где $\gamma_{ij} = \gamma_i - \gamma_j$, $N(\gamma) = A_1 B \gamma^2 - k_1 B \gamma + 1$, $s = A_1 B A_2$, $-\gamma_i$ – корни многочлена $d(\lambda) = s \lambda^3 + B(k_1 A_2 + k_2 A_1) \lambda^2 + (A_1 + A_2 + B k_1 k_2) \lambda + k_1 + k_2$.

Доказана

Теорема 7. Если функция $f(x, y, z)$ является решением корректной задачи (3.1.4) и при $x \rightarrow -\infty$ функция $f(x, y, z)$ вместе с производными, входящими в задачу (3.1.4), имеет асимптотику

$$|f(x, y, z)| = O(e^{\gamma|x|}), \quad 0 < \gamma < \min \operatorname{Re} \gamma_i, \quad (3.1.11)$$

то решение задачи (3.1.1)-(3.1.3) существует, единственно и в соответствующих случаях корней многочлена $d(\lambda)$ выражается через функцию $f(x, y, z)$ по формулам (3.1.5)-(3.1.10).

Получен оператор, обратный операторам (3.1.5)-(3.1.10):

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2k_2} [s \partial_x^3 u_1(x, y, z) + B(k_1 A_2 + k_2 A_1) \partial_x^2 u_1(x, y, z) + (A_1 + A_2 + k_1 k_2 B) \partial_x u_1(x, y, z) + (k_1 + k_2) u_1(x, y, z)], \quad x < 0.$$

$$f(x, y, z) = u_2(x, y, z) + \frac{1}{2k_2} [s \partial_\xi^3 u_1(\xi, y, z) + B(k_1 A_2 - k_2 A_1) \partial_\xi^2 u_1(\xi, y, z) + (A_1 + A_2 - k_1 k_2 B) \partial_\xi u_1(\xi, y, z) + (k_1 - k_2) u_1(\xi, y, z)], \quad x > 0,$$

где $\xi = -x$, при этом функция $f(x, y, z)$ и ее производные непрерывны при $x = 0$.

3.2 Пленки типа (B_1AB_2)

В случае трехслойной пленкой, состоящей из слабо проницаемой прослойки $x = -0$ с параметром B_1 , сильно проницаемой прослойки $x = 0$ с параметром A и слабо проницаемой прослойки $x = +0$ с параметром B_2 класс задач для функций $u_i(x, y, z)$ в полуцилиндрах D_i имеет вид (3.1.1), (3.1.2),

$$x = 0: \quad u_2 - u_1 = B_1 v_1 + B_2 v_2, \quad v_2 - v_1 = A \partial_x^2 (u_1 + B_1 v_1), \quad (3.2.1)$$

где $v_i = k_i \partial_x u_i$.

Теорема 8. Если функция $f(x, y, z)$ является решением корректной задачи (3.1.4) и при $x \rightarrow -\infty$ функция $f(x, y, z)$ вместе с производными, входящими в задачу (3.1.4), имеет асимптотику (3.1.11), то решение задачи (3.1.1), (3.1.2), (3.2.1) существует, единственно и в случаях $d = s(\lambda + \gamma_1)(\lambda + \gamma_2)(\lambda + \gamma_3)$, $\gamma_i \neq \gamma_j$; $d = s(\lambda + \gamma_1)^2(\lambda + \gamma_2)$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$ и $d = s(\lambda + \gamma_1)^3$ выражается через функцию $f(x, y, z)$ по формулам

$$u_1 = \frac{2k_2}{s} \int_0^\infty f(x-t, y, z) \left(\frac{e^{-\gamma_1 t}}{\gamma_{21}\gamma_{31}} - \frac{e^{-\gamma_2 t}}{\gamma_{21}\gamma_{32}} + \frac{e^{-\gamma_3 t}}{\gamma_{31}\gamma_{32}} \right) dt, \quad (3.2.2)$$

$$u_2 = f(x, y, z) + f(-x, y, z) - \frac{2}{s} \int_0^\infty f(-x-t, y, z) \left[\frac{N(\gamma_1) e^{-\gamma_1 t}}{\gamma_{21}\gamma_{31}} - \frac{N(\gamma_2) e^{-\gamma_2 t}}{\gamma_{21}\gamma_{32}} + \frac{N(\gamma_3) e^{-\gamma_3 t}}{\gamma_{31}\gamma_{32}} \right] dt; \quad (3.2.3)$$

$$u_1 = \frac{2k_2}{\gamma_{21}^2 s} \int_0^\infty f(x-t, y, z) [e^{-\gamma_1 t} (\gamma_{21} t - 1) + e^{-\gamma_2 t}] dt, \quad (3.2.4)$$

$$u_2 = f(x, y, z) + f(-x, y, z) - \frac{2}{\gamma_{21}^2 s} \int_0^{\infty} f(-x-t, y, z) \{ e^{-\gamma_2 t} N(\gamma_2) + e^{-\gamma_1 t} [\gamma_{21} N(\gamma_1) t - N(\gamma_2) + \gamma_{21}^2 AB_1 k_1] \} dt \quad (3.2.5)$$

и

$$u_1 = \frac{k_2}{s} \int_0^{\infty} f(x-t, y, z) e^{-\gamma_1 t} t^2 dt, \quad (3.2.6)$$

$$u_2 = f(x, y, z) + f(-x, y, z) - \frac{2}{s} \int_0^{\infty} f(-x-t, y, z) e^{-\gamma_1 t} \left[\frac{1}{2} N(\gamma_1) t^2 + A(1 - 2B_1 k_1 \gamma_1) t + AB_1 k_1 \right] dt, \quad (3.2.7)$$

где $-\gamma_i$ – корни многочлена $d(\lambda) = s\lambda^3 + A(k_1 B_1 + k_2 B_2)\lambda^2 + (A + \beta_1 + \beta_2)\lambda + k_1 + k_2$, $N(\gamma) = AB_1 k_1 \gamma^2 - A\gamma + k_1$, $\gamma_{ij} = \gamma_i - \gamma_j$, $s = B_1 AB_2 k_1 k_2$, $\beta_i = B_i k_1 k_2$.

Оператор, обратный операторам (3.2.2)-(3.2.7) имеет вид

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2k_2} [s\partial_x^3 u_1(x, y, z) + A(k_1 B_1 + k_2 B_2)\partial_x^2 u_1(x, y, z) + (A + \beta_1 + \beta_2)\partial_x u_1(x, y, z) + (k_1 + k_2)u_1(x, y, z)], \quad x < 0,$$

$$f(x, y, z) = u_2(x, y, z) - \frac{1}{2k_2} [s\partial_{\xi}^3 u_1(\xi, y, z) + A(k_2 B_2 - k_1 B_1)\partial_{\xi}^2 u_1(\xi, y, z) +$$

$$+ (\beta_1 + \beta_2 - A) \partial_{\xi} u_1(\xi, y, z) + (k_2 - k_1) u_1(\xi, y, z)], \quad x > 0,$$

где $\xi = -x$.

Отметим, что условие на бесконечности (3.1.11) для функции $f(x, y, z)$ в рассмотренных случаях является достаточно слабым, т.е. полученные несобственные интегралы (3.1.5)-(3.1.10), (3.2.2)-(3.2.7) для функций $u_i(x, y, z)$ сходятся достаточно быстро.

Формулы (3.1.5)-(3.1.10), (3.2.2)-(3.2.7) устанавливают взаимнооднозначное соответствие между решениями рассмотренных задач с пленками и решениями аналогичных классических задач вида (3.1.4) без пленки при сохранении области D , уравнения и граничных условий.

3.3 Частные случаи

Рассмотрены конкретные задачи в различных областях с пленочными включениями, для которых решение соответствующей задачи без пленки, т.е. функция $f(x, y, z)$, строится в конечном виде. При этом решение задач с пленками строится по выведенным формулам в однократных квадратурах.

3.3.1 Фундаментальные решения для уравнения Лапласа на всей плоскости $P_0 = R^2$, в полуплоскости $P_1 = (x \in R) \times (0 < y < \infty)$ и в полосе $P_2 = (x \in R) \times (0 < y < \pi)$ с однородными граничными условиями Дирихле на $\partial P_{1,2}$ имеют соответственно вид

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi} \ln[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2], \quad x_0 > 0, \quad (3.3.1)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}, \quad x_0 > 0, \quad y_0 > 0 \quad (3.3.2)$$

и

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\operatorname{ch}(x - x_0) - \cos(y - y_0)}{\operatorname{ch}(x - x_0) - \cos(y + y_0)}, \quad x_0 > 0, \quad 0 < y_0 < \pi, \quad (3.3.3)$$

при этом функция $f(x, y)$ в соответствующей области является решением задачи $\Delta f = \delta(x - x_0, y - y_0)$, $f|_{\partial P_{1,2}} = 0$, где $\delta(x, y)$ – функция Дирака. Тогда фундаментальные решения аналогичных задач в кусочно-однородных областях P_j , $j = 0, 1, 2$ проницаемости k_i в D_{ij} , $i = 1, 2$, с трехслойными пленками $x = 0$ строятся по найденным формулам (3.1.5)-(3.1.10), (3.2.2)-(3.2.7), где $D_{1j}(x < 0)$, $D_{2j}(x > 0)$; переменная $y \in R$, $0 < y < \infty$, $0 < y < \pi$ соответственно при $j = 0, 1, 2$ и в указанных формулах функция $f(x, y)$ соответственно равна (3.3.1)-(3.3.3).

3.3.2 Рассмотрим в полуплоскости $P_1(y > 0)$ задачу Дирихле

$$\Delta f = 0, \quad f|_{y=0} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ h(x), & x > 0, \end{cases} \quad |f(x, y)| = O(1), \quad (3.3.4)$$

решение которой имеет вид

$$f(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{h(t) dt}{(x-t)^2 + y^2}.$$

При этом для граничной функции вида «ступеньки»

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (x_1, x_2), \\ c, & x \in (x_1, x_2), \end{cases} \quad x_1 > 0, \quad (3.3.5)$$

решение задачи (3.3.4) строится в конечном виде

$$f(x, y) = \frac{c}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{x-x_1}{y} - \operatorname{arctg} \frac{x-x_2}{y} \right). \quad (3.3.6)$$

Также решение задачи Дирихле в полосе $P_2(0 < y < \pi)$

$$\Delta f = 0, \quad f|_{y=0} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ h(x), & x > 0, \end{cases} \quad f|_{y=\pi} = 0$$

строится по формуле

$$f(x, y) = \frac{\sin y}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{h(t) dt}{\operatorname{ch}(x-t) - \cos y}$$

и для граничной функции (3.3.5) имеет конечный вид

$$f(x, y) = \frac{c}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{\cos y - e^{x_1-x}}{\sin y} - \operatorname{arctg} \frac{\cos y - e^{x_2-x}}{\sin y} \right). \quad (3.3.7)$$

Функция Грина $f(x, t, \xi)$ задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности: $\partial_t f - \partial_x^2 f = 0$, $f|_{t=0} = \delta(x - \xi)$, имеет вид [21, с. 222]:

$$f(x, t, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right], \quad \xi > 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0. \quad (3.3.8)$$

Отсюда решения аналогичных задач в соответствующих кусочно-однородных областях с трехслойными пленками $x = 0$ выражаются через функции f (3.3.6)-(3.3.8) в однократных квадратурах (3.1.5)-(3.1.10), (3.2.2)-(3.2.7).

3.3.3 Если пленка отсутствует (идеальный контакт полуцилиндров D_i), то решение задачи (3.1.1), (3.1.2) с классическими условиями сопряжения

$$x = 0: \quad u_1 = u_2, \quad k_1 \partial_x u_1 = k_2 \partial_x u_2$$

получим в виде

$$u_1 = \frac{2k_2}{k_1 + k_2} f(x, y, z), \quad u_2 = f(x, y, z) + \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} f(-x, y, z),$$

где $f(x, y, z)$ – решение задачи (3.1.4). Отсюда в частном случае уравнения Лапласа следуют формулы, полученные методом отражения особых точек [23].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В 2016 г. получены следующие результаты:

- в пространстве R^3 рассмотрены новые классы краевых задач со сферическими сильно- и слабо проницаемыми пленками, расположенными внутри рассматриваемых областей или на их границах, когда областями является все пространство или области, ограниченные координатными поверхностями сферической системы координат;
- рассмотрены новые приложения краевых задач в цилиндрах $D \in R^m$, состоящих из двух полуцилиндров, разделенных трехслойными пленками различных типов;
- выведены явные формулы, выражающие решения рассмотренных задач через решения аналогичных классических задач без пленок с сохранением области, уравнения и граничных функций; при этом выведенные формулы позволяют для каждого известного решения классической задачи автоматически получать решения серии аналогичных задач с различными пленками;
- дано математическое обоснование полученных результатов в виде теорем существования и единственности в соответствующих пространствах функций;
- решены конкретные краевые задачи с различными пленками.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Пилатовский В.П. Основы гидромеханики тонкого пласта. М.: Недра, 1966. 317 с.
 - 2 Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 513 с.
 - 3 Абдурахманов И.М., Алишаев М.Г. Плоская стационарная фильтрация в пласте, разделенном прямолинейной трещиной // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 4. С. 173-177.
 - 4 Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. М.: Изд-во МГУ, 1987. 167 с.
 - 5 Ерофеев В.Т., Козловская И.С. Интегральные уравнения в задачах экранирования электромагнитных полей для цилиндрических тел // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 2. С. 242-247.
 - 6 Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 312 с.
 - 7 Крутицкий П.А., Прозоров К.В. К задаче для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости с заданием условия Дирихле и условия с косой производной на разных сторонах разрезов // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 9. С. 1268-1283.
 - 8 Krutitskii P.A. The modified jump problem for the Laplace equation and singularities at the tips // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2005. V. 183. pp. 232-240.
 - 9 Номировский Д.А. Обобщенная разрешимость параболических систем с неоднородными условиями сопряжения типа неидеального контакта // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 10. С. 1390-1399.
 - 10 Симоненко И.Б. Задачи электростатики в неоднородной среде. Случай тонкого диэлектрика с большой диэлектрической постоянной // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10. № 2. С. 301-309.
 - 11 Коляно Ю.М., Процюк Б.В., Драпкин Б.А. Функция Грина для пространственных стационарных задач теплопроводности многослойного тела // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 3. С. 524-527.
 - 12 Холодовский С.Е. Метод свертывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2007. Т. 47. № 9. С. 1550-1556.
- (Kholodovskii S. E. A Method of Convolution of Fourier Expansions as Applied to Solving Boundary Value Problems with Intersecting Interface Lines // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2007. Vol. 47. No. 9. pp. 1489-1495).

13 Холодовский С.Е. Метод рядов Фурье для решения задач в кусочно-неоднородных средах с прямолинейной трещиной (завесой) // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2008. Т. 48. № 7. С. 1209-1213.

(Kholodovskii S. E. A method of Fourier series for solution of problems in piecewise inhomogeneous domains with rectilinear crack (screen) // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2008. Vol. 48. No. 7. pp. 1140-1144).

14 Холодовский С.Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855-859.

(Kholodovskii S. E. The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of Generalized Transmission Conditions of Crack (Screen) Type in Piecewise Inhomogeneous Media // Differential Equations. 2009. Vol. 45. No. 6. pp. 873-877).

15 Холодовский С.Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1204-1208.

(Kholodovskii S. E. The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of a Crack (Screen) in an Inhomogeneous Space // Differential Equations. 2009. Vol. 45. No. 8. pp. 1229-1233).

16 Холодовский С.Е. О решении краевых задач на кусочно-однородной плоскости с параболической трещиной (завесой) // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2009. Т. 49. № 11. С. 1931-1936.

(Kholodovskii S. E. Solution of Boundary Value Problems for Laplace's Equation in a Piecewise Homogeneous Plane with a Parabolic Crack (Screen) // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2009. Vol. 49. No. 11. pp. 1847-1852).

17 Холодовский С.Е., Шадрина Н.Н. О решении краевых задач с обобщенными условиями сопряжения типа трещины (завесы) // Известия вузов. Математика. 2011. № 6. С. 100-106.

(Kholodovskii S. E., Shadrina N.N. Solution of Boundary-Value Problems with Generalized Transmission Conditions of the Type of a Crack or a Screen // Russian Mathematics. 2011. Vol. 55. No. 6. pp. 85-90).

18 Холодовский С.Е., Нутчина-Пестрякова Н.В. О решении краевых задач в цилиндрах, разделенных трехслойной пленкой на два полуцилиндра // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2012. Т. 52. № 7. С. 1261-1266.

19 Холодовский С.Е. О решении краевых задач для уравнения Лапласа на плоскости с трехслойным пленочным включением // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 12. С. 1697-1701.

(Kholodovskii S. E. On the Solution of Boundary Value Problems for the Laplace Equation on the Plane with a Three-Layer Film Inclusion // *Differential Equations*. 2013. Vol. 49. No. 12. pp. 1655–1660).

20 Холодовский С.Е. О решении краевых задач в полупространстве, ограниченном многослойной пленкой // *Ученые записки ЗабГГПУ. Сер. Физика, математика, техника, технология*. 2011. № 3 (38). С. 160-164.

21 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.

22 Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 655 с.

23 Голубева О.В. Обобщение теоремы об окружности на фильтрационные течения // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1966. № 1. С. 113-116.

Список работ исполнителей НИР по данному гос. заданию за 2016 г.

24 Kholodovskii S. E. On Multilayer Films on the Boundary of a Half-Space // *Mathematical Notes*, 2016, Vol. 99, No. 3, pp. 426–431). (**Из перечня Web of Science, Scopus**)

25 Холодовский С.Е. О математической модели динамических процессов в биоматериалах с трехслойными наноразмерными пленками // *Ученые записки ЗабГУ. Серия «Физика, математика, техника, технология»*. 2016. Т. 11. № 4. С. 11-20.

(Из перечня ВАК)

26 Холодовский С.Е. Решение краевых задач в цилиндрах с двухслойным пленочным включением // *Сибирский журнал чистой и прикладной математики*. Новосибирск. 2016. Т. 16. № 3. С. 98-102. (**Из перечня ВАК**)

27 Холодовский С.Е. О решении задачи Дирихле в кусочно-однородной полосе с пленочным включением // *Современные тенденции развития науки и технологий*. 2016. № 10. Часть 3. С. 23-24. (Периодический научный сборник по материалам XIX Международной научно-практической конференции. г. Белгород, 31 октября 2016 г.)

28 Холодовский С.Е. О решении задачи Коши с обобщенными условиями сопряжения для уравнения теплопроводности // *Научный журнал «Scientia. Физика и математика»*. № 5. 2016. С. 9-11.